FACHHOCHSCHULE WEDEL

Prof. Dr. I. Pockrand

Übungsaufgaben zur Vorlesung "Differentialgleichungen"

1) Ermitteln Sie die allgemeinen Lösungen folgender Differentialgleichungen:

a) $y'\sin x - y\cos x = -1$ $\qquad y = C\sin x + \cos x$

b) $y' + y\sin x - \frac{\sin x}{\sqrt{y}} = 0$ $\qquad y = \left(1 + Ce^{\frac{3}{2}\cos x}\right)^{\frac{2}{3}}$

c) $y'e^{x+y} = \sin x$ $\qquad y = \ln(C - \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos))$

d) $(x^2 - y^2)y' - 2xy = 0$ $\qquad x^2 + \left(y - \frac{C}{2}\right)^2 = \left(\frac{C}{2}\right)^2$

e) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\cos x$ $\qquad y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} - e^{-x}\cos x$

f) $(1 - x^2)y'' - 4xy' - (1 + x^2)y = x$ $\qquad y = \left(1 - x^2\right)^{-1}(x + C_1\cos x + C_2\sin x)$

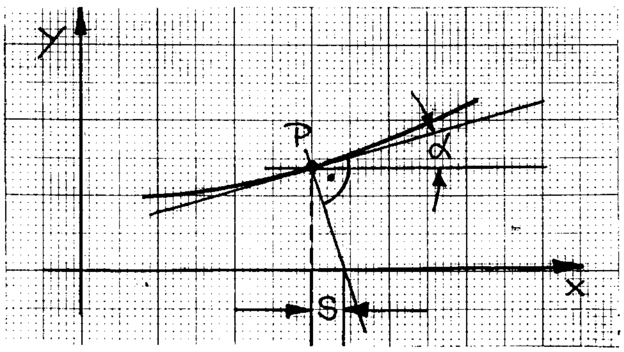
g) $x(y' + 1) + y = 0$ $\qquad y = \frac{C}{x} - \frac{1}{2}x$

h) $y'' - 2y' + y = 1 + e^x$ $\qquad y = 1 + (C_1 + C_2x + \frac{1}{2}x^2)e^x$

i) $y(2y - 3x)dx + x(2y - x)dy = 0$ $\qquad yx^2(y - x) + C = 0$

k) $y^2 + yx^2y' - yy' + 1 = 0$ $\qquad y^2 = C\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1$

2) Für welche den Punkt P=(1 | 0) enthaltende Kurve ist der Subnormalenabschnitt S überall gleich dem Quotienten aus den Koordinaten des zugehörigen Punktes ?



$y = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ oder $y = \ln x$

3) Wie lautet die Differentialgleichung der Schar aller Kreise vom Radius r = 1 in der Ebene ?

$y''^2 - (1 + y'^2)^3 = 0$

4) Zeigen Sie, daß die Differentialgleichung $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ einen integrierenden Faktor $\mu(x,y) = \mu(x^2 + y^2)$ hat, wem der Term $(M_y - N_x)/2xN - 2yM)$ sich als Ausdruck in $z = x^2 + y^2$ darstellen läßt. Wie lautetet $\mu = \mu(x,y)$?

Wenden Sie das Gezeigte auf die Differentialgleichung $(x^2 + 2x + y^2)dx + 2ydy = 0$ an und ermitteln Sie die allgemeine Lösung.

$\mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{2xN - 2yM} dz}, \mu = (x^2 + y^2)^{-1}, e^x(x^2 + y^2) = C$

5) Gegeben ist die Differentialgleichung $y = y' x^2$.

a) Zeichnen Sie die Isoklinen, für die $y' = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$ ist.

b) Lösen Sie die Differentialgleichung rechnerisch.

$y = Ce^{-\frac{1}{x}}$

6) Bestimmen Sie die Kurve durch den Punkt(2/1), die folgende Bedingung erfüllt:
Der Betrag der Ordinate des Schnittpunktes der Tangente mit der y-Achse ist in jedem Kurvenpunkt doppelt so groß wie der Abszissenwert der Berührpunktes.

$y = 2x\ln x + \frac{x}{2}(1 - 4\ln 2)$

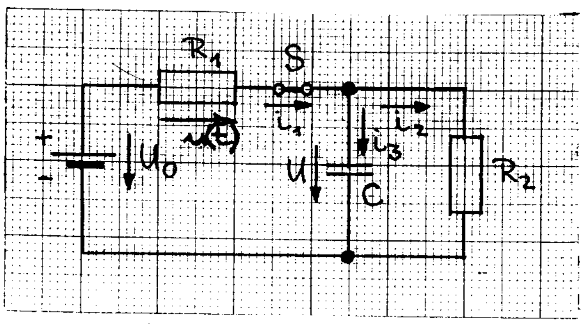
7) Gegeben ist die Differentialgleichung $y^2(y'^2 + 1) - 1 = 0$.

a) Bestimmen Sie die singulären Lösungen.

b)Ermitteln Sie die allgemeine Lösung.

$y = \pm 1, (x + C)^2 + y^2 = 1$

8) Für den gezeigten Stromkreis berechne man den Verlauf der Spannung U=U(t) an C und des Stromes $i_1 = i_1(t)$ am Schalter S durch Integration der zugehörigen Differentialgleichung ($(t = 0) = 0$).



$U(t) = \frac{R_0}{R_1} U_0 (1 - e^{-\frac{t}{R_0 C}}), i_1(t) = \frac{U_0}{R_1 + R_2}\left(1 + \frac{R_2}{R_1} e^{-\frac{t}{R_0 C}}\right) R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

Übungsaufgaben zur Vorlesung Differentialgleichungen

II.2 $3x^2 + ax - 5y' = 0$ $\qquad$ $y = \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{10}ax^2 + C$

$y' = \sin x \cdot \sin y$ $\qquad$ $y = 2\arctan\{C \cdot \exp(-\cos x)\}$

$(1 - y - x^2 + yx^2)y' = 1 - x$ $\qquad$ $x = C \cdot \exp\left\{y - \frac{y^2}{2}\right\} - 1$

II.3 $y'y^3 - x + 2y^2 = 0$ $\qquad$ $\ln|Cx| + \frac{1}{2}\ln\left|2 - 4\frac{y^2}{x} - \left(\frac{y^2}{x}\right)^2\right| = \frac{2}{\sqrt{24}} \cdot \ln\left|\frac{4 + 2x + \sqrt{24}}{4 + 2x - \sqrt{24}}\right|$

$xy' + 3y^2x - y = 0$ $\qquad$ $y = \frac{2Cx}{3Cx^2 - 3}$

$xy^2dy + (x^3 - y^3)dx = 0$ $\qquad$ $y = x \cdot (C - 3\ln|x|)^{\frac{1}{3}}$

II.4 $xy' - y = x^2 \cdot \cos x$ $\qquad$ $y = x \cdot (C + \sin x)$

$y' = \frac{y}{x} + x^2 \sin x$ $\qquad$ $y = x\sin x - x^2\cos x + Cx$

$xy' + y = x^2 + 3x + 2$ $\qquad$ $y = \frac{C}{x} + \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$

II.5 $y' - y = 2\sin x + \cos x$ $\qquad$ $y = C \cdot e^x - \frac{1}{2}\sin x - \frac{3}{2}\cos x$

$(e^x)^2(y' + y) - 2 = 0$ $\qquad$ $y = C \cdot e^{-x} - 2e^{-2x}$

$y' + 2y = 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad$ $y = C \cdot e^{-2x} + \frac{6}{13}\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{13}\cos\left(3x + \right.$

II.6 $y'(x^2y + x^3 + x^2) + 2xy + 3x^2 = 0$ $\qquad$ $(x^2y + x^3)e^y = C$

$(1 - \sin x \cdot 2y)y' = y^2\cos x$ $\qquad$ $y - y^2\sin x = C$

$(\sin x\cos x + 2y\cos^3 x)y' + (y - y^2\sin x\cos^2 x) = 0$ $\qquad$ $y\tan x + y^2\cos x + C = 0$

II.7 $\left(\frac{y'}{\sin x}\right) + y = \frac{1}{\sqrt{y}}$ $\qquad$ $y = \left(1 + C \cdot \exp\left(\frac{3}{2}\cos x\right)\right)^{\frac{2}{3}}$

$xy' + y = y^2\ln x$ $\qquad$ $y = (1 + \ln x + Cx)^{-1} \quad ; \quad x > 0$

$y' + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 0$ $\qquad$ $y = \left(\frac{C}{x^2} - \frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{1}{2}}$

II.8	$y'^3 - 27y^2 = 0$	$y = (x - C)^3$; $y = 0$ ist sing. Lsg.
	$xy'^2 - 2yy' + x + 2y = 0$	$2x^2 + 2C(x - y) + C^2 = 0$; $x^2 + 2xy - y^2 = 0$ sing. Lsg.
	$y'^2 + 4xy' - 2y = 0$	$(4x^3 + 3xy + C)^2 = 2(2x^2 + y)^3$; keine s
III.2	$x + y' - xy'' = 0$	$y = C_2 + \frac{1}{2}x^2(C_1 + \ln x)$
	$(y'')^2 = (y')^5$	$y = C_2 \mp 2\left(C_1 + \frac{3}{2}x\right)^{\frac{1}{3}}$
	$yy'' = 1 + y^2$	$x = \int \pm (2\ln y + y^2 + C_1)^{-\frac{1}{2}} dy + C_2$
III.3	$y'' + y = x\cos x + \sin x$	$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}x^2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x$
	$\ddot{x} + 2\dot{x} + 17x = 2\sin 5t$; $x(\pi) = 0,\ \dot{x}(\pi) = 1$	$x = e^{-t}(2{,}26\sin 4t - 2{,}82\cos 4t - 0{,}098\sin 5t - 0,$
	$y'' + 4y' + 13y = 0$	$y = e^{-2x}(C_1\sin 3x + C_2\cos 3x)$
III.4	$x^2y'' + 3xy' + y = 0$	$y = \frac{1}{x}(C_1 + C_2\ln x)$
	$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = x^3$	$y = C_1x + C_2xe^x - x^2$
	$(1 - x^2)y'' - 4xy' - (1 + x^2)y = x$	$y = \frac{1}{1-x^2}(x + C_1\cos x + C_2\sin x)$